Lezione 1: Numeri complessi: coniugati, moduli, inverso

Trattiamo prima di tutto i *numeri complessi* come insieme per cui equazioni nei numeri reali non hanno soluzione.

Abbiamo i2 = -1, in cui *i* indica una *unità immaginaria*.

i è soluzione dell’equazione x2 + 1 = 0 e le soluzioni sono *i* e *-i*.

Un numero complesso è un numero del tipo *z* = *a + ib* con:

* a, parte reale di Z
* b, parte immaginaria di Z

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

L’insieme dei numeri complessi è dato da:

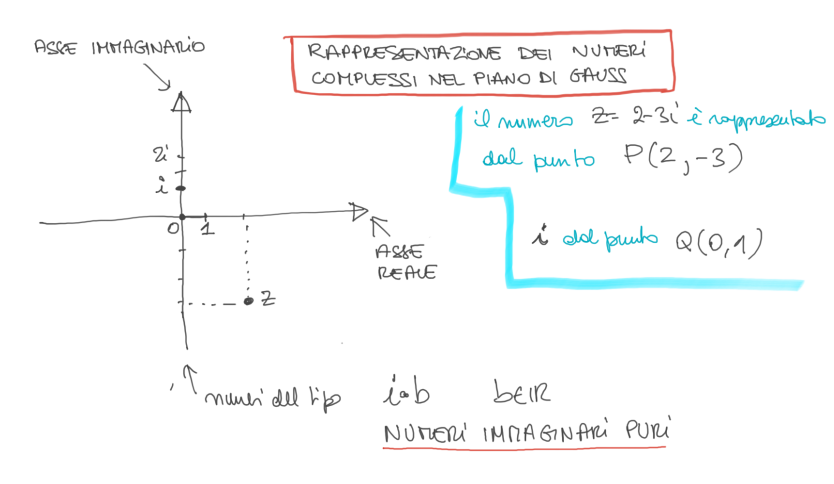


Esempio di operazioni di somma e prodotto con i complessi:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Sul piano di Gauss vengono rappresentati come:



Se *z = a + ib*, il coniugato di z è z = a – ib e rappresenta un ribaltamento del piano rispetto all’asse reale.

Ha queste proprietà:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Se *z = a + ib,* allora il modulo è:

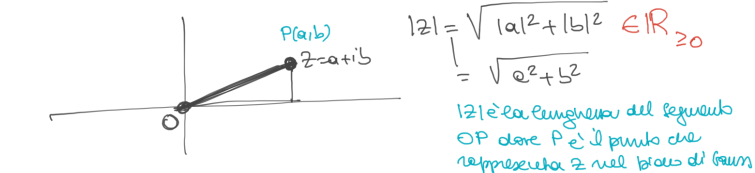


Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteHa queste proprietà:

L’inverso di un numero complesso è quel numero tale che moltiplicato per z dà 1.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Lezione 2: Divisione in N e in Z, MCD e Algoritmo di Euclide

Definiamo la *divisione in N*, con due numeri a e b con b diverso da 0. Allora *esistono* e *sono unici* due numeri naturali *q* (quoziente) e *r* (resto) tali che con 0 <= r < b.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Abbiamo poi la *divisione in Z*, con due numeri a e b in Z e con b diverso da 0. Allora *esistono* e *sono unici* due numeri interi *q* (quoziente) e *r* (resto) tali che con 0 <= r < b.

NB: La condizione 0 <= r < b serve ad avere unicità di q e r

Immagine che contiene testo, dispositivo, calibro

Descrizione generata automaticamente

Seguono le nozioni di divisibilità in N ed in Z:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Descriviamo il *massimo comun divisore in N ed in Z*.

Siano a, b in N non entrambi nulli.

Si dice che d sia massimo comun divisore di a e di b se:

1. d|a e d|n
2. se z|a e z|b allora z|d

Inoltre:

* in N *d* esiste ed è unico, allora sarà IL massimo comun divisore di *a* e *b*
* MCD(a,b) = MCD (b,a)
* Con a,b in N e b diverso da 0, se b|a allora MCD(a,b)
* Immagine che contiene testo

  Descrizione generata automaticamenteCon a,b in N e b diverso da 0, il quoziente ed il resto delle divisioni di *a* e di *b*

Negli interi:

Siano a, b in N non entrambi nulli.

Si dice che d sia massimo comun divisore di a e di b se:

1. d|a e d|n
2. se z|a e z|b allora z|d

Se d è massimo comun divisore si scrive d = MCD(a,b)

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Per *a*, *b* nei naturali e con entrambi non nulli, posso descrivere l’*algoritmo di Euclide* per il calcolo del MCD in *a* e *b*. Consiste in una sequenza di divisioni successive:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Quindi, MCD è l’ultimo resto non nullo della sequenza di divisioni successive. Seguono 3 esempi:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Lezione 3: Polinomi e relative operazioni

L’MCD quindi si calcola in due modi:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Descriviamo poi i *polinomi* nell’insieme S[x] come insieme dei polinomi nella indeterminata x ed a coefficienti in S.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Con an diverso da 0, allora il grado di f(x) è n = deg f(x) e an è il *coefficiente direttore* mentre a0 è il *termine noto* di f(x).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteLa *somma di polinomi* viene definita come:

Il *prodotto di polinomi* viene definito come:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

NB:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Quindi vale *la legge di cancellazione del prodotto*:

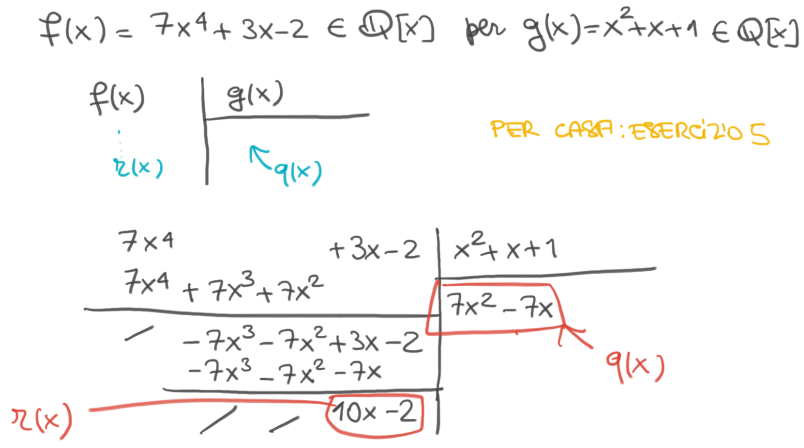
Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamentePer la *divisione di polinomi* invece:

Esempio di divisione:



Le *radici (o zeri) di un polinomio* avendo f(x) in S[x] sono tali se f(x0) = 0 (f valutato in x0 ed è soluzione dell’equazione).

Per il calcolo delle soluzioni può esservi il *teorema di Ruffini*:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

E *radici di polinomi reali di secondo grado*:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Similmente si riporta il *teorema fondamentale dell’algebra*, che dice che avendo un polinomio f(x) di grado n > 0 e a coefficienti complessi:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Ogni polinomio di grado n > 0 a coefficienti complessi si fattorizza in n fattori lineari ed equivalentemente a coefficienti complessi di grado *n* ha *n* soluzioni complesse contate con le loro molteplicità.

Lezione 4: Teorema di Bezout, Classi di congruenza, Relazioni di equivalenza

Ritornando alla divisione in Z, con a,b in Z, entrambi non nulli e d = MCD (ab) vogliamo trovare m, n in Z

tali che: .

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Citiamo ora l’*identità di Bezout*:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Per trovarli:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Esempio (in 2 modi):

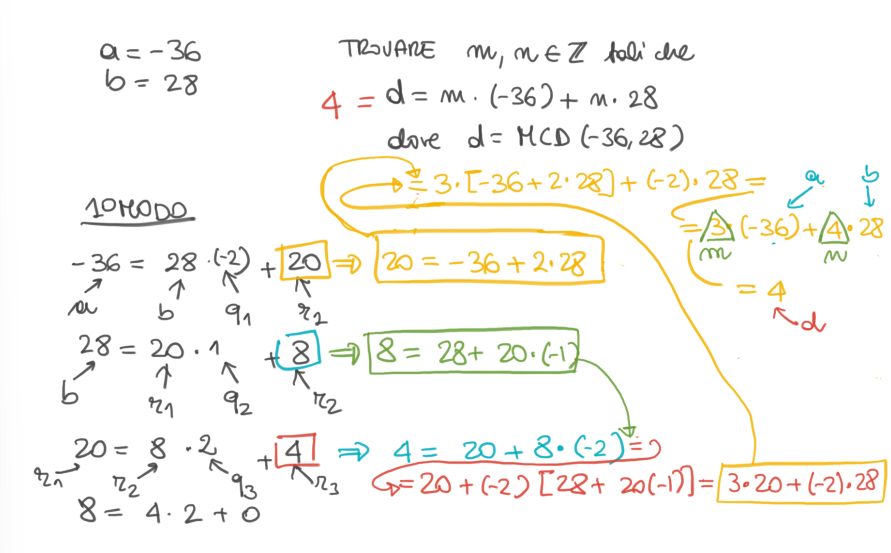


Immagine che contiene testo, lavagnabianca

Descrizione generata automaticamente

Definiamo poi le *classi di congruenza*:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Le relazioni che hanno le 3 proprietà precedenti sono *relazioni di equivalenza*.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Si ha inoltre [a]n che indica la *classe di congruenza di a modulo n* e tutti gli interi che sono congrui ad a modulo n, come b ≡ a mod n.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, interni

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteSi riporta una serie di osservazioni:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Lezione 5